Subiectul II — Exercițiul 2

Matematica — M1_Mate-Info

Toate aparițiile acestui exercițiu din toate modelele de examen din categoria de mai sus.

102 exerciții · din 102 sesiuni (2012–2026)

1. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1)$.
5p	**a)** Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă.
5p	**b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” admite element neutru.
5p	**c)** Rezolvați ecuația $x*x*x=3$.

2. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

3. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	2. Se consideră polinomul $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3},\ f \in \mathbb{Z}_5[X]$.
5p	**a)** Arătați că $a^5 = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_5$.
5p	**b)** Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.
5p	**c)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

4. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p), X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

5. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + X - m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X - 1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m = 2$ determinați patru numere întregi a, b, c, d, cu $a > 0$, astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

6. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 3X - 1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(2) - f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X + 2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

7. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p **a)** Calculaţi $3 \circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x \circ y = (x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

8. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 4$, arătaţi că $f(4) = 8$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1 + x_2 = x_3$.

5p **c)** Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X - 3$.

9. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde m este un număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(-1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

10. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

elementelor egala cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*...*\frac{2014}{1007}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$”.

11. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 4$.

5p **c)** Arătați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

12. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(2) = 2(a-3)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

5p **c)** Pentru $a = 3$, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x) = 0$.

13. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.

5p **c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

14. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

15. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x și y.

5p **b)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculaţi $d_1*d_2*\cdots*d_8$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

16. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = -1$, demonstrați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

17. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

18. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3 = 3$.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n pentru care $n \circ n = 11$.

5p **c)** Calculaţi $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

19. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = a$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2016 - 4a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

20. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinați numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

21. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m*n=27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

22. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x) f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a} = 3^{2015} - 1$.

23. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + 2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1) = 0$.

5p **b)** Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) = 0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m = 3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

24. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

25. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

26. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

27. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+2)X^2+\left(m^2+2\right)X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

28. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de**

29. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

30. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

31. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\leq\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

32. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + 5X + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1) - f(-1) = 12$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X - 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

33. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

numerele a, b și c sunt întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

34. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

35. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a \circ b = 1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, numărul $\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

36. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+mX^2-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(-2)=0$.

5p **b)** Pentru $m=1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Se consideră $a=\frac{x_1^2+mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2+mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2+mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a\in[3,+\infty)$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

37. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

38. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Demonstrați că $3\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3\right)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

39. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

40. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2\left(2^x + 2^y\right)$.

5p **a)** Arătați că $0 * 0 = 1$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$.

41. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 14$

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\left(2^n + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+1} + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+2} + \frac{3}{2}\right) = 2^{20} + \frac{3}{2}$.

42. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - \sqrt{3}(x + y) + 3 + \sqrt{3}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x * y = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(y - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \ldots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

43. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$.

44. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x * y = \left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}\right)^5$.

5p **a)** Arătaţi că $2^5 * 3^5 = 5^5$.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $2^5 * x^5 * \left(243x^5\right) = 100000$.

5p **c)** Se consideră numerele $M = 1^5 * 2^5 * ... * 10^5$ și $N = 5^5 \cdot 11^5$. Demonstrați că $M - N = 0$.

45. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Pe mulțimea $M=(-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{100(x+y)}{xy+100}$.

5p **a)** Arătați că $3*0=3$.

5p **b)** Se consideră $f:M\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 11 ori } x}=0$.

46. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y\in G$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:M\to G$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

47. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$.

5p **b)** Verificați dacă $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

48. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = \frac{26}{9}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „$*$” sunt numere naturale.

49. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{3}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{54}$.

50. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$.

5p **a)** Arătați că $2*64=4$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați $x\in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$*$”.

51. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$.

5p **a)** Arătați că $x * 1 = 3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $0 * x = -9$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x * y = 3$, atunci $(x-1)(y-1) = 0$.

52. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2020}$.

5p **a)** Arătați că $x*(-x)=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{2021}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$.

53. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=2^{\ln x\cdot\ln y}$.

5p **a)** Arătați că $x*1=1$, pentru orice $x\in G$.

5p **b)** Determinați $f\in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$ pentru care $x*\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$.

54. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(2-i)=6+i$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $z\circ\overline{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-2$.

55. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 13$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x * x) * x^2 = 61$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

56. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $(-1) * 1 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

57. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$.

5p **a)** Arătați că $2 * (-1) = 23$.

5p **b)** Demonstrați că $e = -4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Pentru $r \in \{0,1,2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu

58. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-2x^2-2y^2+6$.

5p **a)** Arătați că $1*1=3$.

5p **b)** Arătați că $x*y\neq 2$, pentru orice numere raționale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=3$.

59. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\overline{z}_1 - \frac{1}{2}\overline{z}_2$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(1-i)=1$.

5p **b)** Se consideră $H=\{2+bi \mid b\in\mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră numărul complex z_0. Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real.

60. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $2*(-2)=0$.

5p **b)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

61. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-4(x+y)+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=10$, arătați că $1*2=0$.

5p **b)** Pentru $a=20$, arătați că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[20,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

62. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulțimea $A=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

5p **a)** Arătați că $1*2020=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

63. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.

5p **b)** Determinați perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

64. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea $M=(2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.

5p **a)** Arătați că $5*10=17$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

65. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Speciala Subiect V07 · V07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

66. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $3*4=5$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*\sqrt{5}<x+1$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

67. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

5p **a)** Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.

5p **b)** Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

68. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.

5p **a)** Arătați că $(5 * 2) * 1 = 2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $(a * b) + (b * c) \geq a * c$, pentru orice numere reale a, b și c.

69. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.

5p **a)** Arătați că $2 * 4 = 4 * 2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” **nu** este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2 * 2) * n < 64$.

70. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x*\left(-x\right)\right)*\left(\left(-x\right)*x\right)=24x$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x.

71. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.

5p **a)** Arătați că $(2+i)\circ(2-i)=9$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul $A=\left(-1+(a+1)i\right)\circ\left(-1+(a-1)i\right)$ este real strict mai mic decât 0.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-5$.

72. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

73. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$.

5p **a)** Arătați că $1 * 5 = 5$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x \geq 0$, pentru care $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a, $a \neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „$*$” este strict mai mic decât 0.

74. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy-4}{x+y-4}$.

5p **a)** Arătați că $8\circ 8=5$.

5p **b)** Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\dfrac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

75. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

76. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\dfrac{1}{2}\right)*f\left(\dfrac{2}{3}\right)*f\left(\dfrac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

77. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\frac{xy}{3}-x-y+6$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*3=3$.

5p **b)** Arătați că $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 3$ pentru care $(x*(x+x'-3))+(x'*(2x-3))=42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”.

78. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x+y) + m(m+1)$, unde $m \in (0,+\infty)$.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x, știind că $\left(mx^3\right) \circ \left(-mx^2\right) = m$, pentru orice $m \in (0,+\infty)$.

79. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{2}\left(x+y+\left|x-y\right|\right)$.

5p **a)** Arătați că $2*0=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

80. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

81. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4 \cdot |z_1 z_2| + 1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

82. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

83. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy(x+y)}{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\dfrac{1}{m}*\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{16}\cdot(m*n)$.

84. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{2x}{y+2}+\frac{2y}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $1*0=1$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{4}{x}=x$.

85. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

86. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy}{1+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}$.

5p **a)** Arătați că $1*\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere din mulțimea M pentru care $a*b=1$.

87. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

5p **a)** Arătați că $0*1=-3$.

5p **b)** Arătați că $x*(-1)\leq 2x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $m*n=1$.

88. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3-8X^2+3mX+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=3$.

5p **b)** Pentru $m=0$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1=1+\sqrt{3}$.

89. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + \left(2^x - 2\right)\left(2^y - 2\right)$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ 3 = 18$.

5p **b)** Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $x \circ \left(-x\right) \leq 1$, pentru orice număr real x.

90. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Pentru $m=2$, arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:M\to M$, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru $m=1$, arătați că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x,y\in M$.

91. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=5$.

92. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + \frac{2x+2y-1}{4}$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$.

5p **b)** Arătați că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2}-x\right) \circ \left(\frac{1}{2}+x\right) \circ \left(\frac{1}{2}+x^2\right) = \frac{1}{2}-x^2$.

93. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+X+2-a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\left(x_1-x_1^2\right)\left(x_2-x_2^2\right)\left(x_3-x_3^2\right)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

94. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-aX+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+1$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

95. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y + xy^2 + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 16$.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{2}{x} = 9x$.

5p **c)** Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

96. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziție „$*$”.

97. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziție „$*$”.

98. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $3*5=\dfrac{7}{4}$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x=3$.

5p **c)** Demonstrați că $(x*2)*x>2$, pentru orice $x\in M$.

99. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Rezerva Vara Iunie · V07

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Rezerva_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX-6$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Pentru $a=4$ și $b=0$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=b=1$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X+1$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.

100. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră polinomul $f=mX^4-mX^2+X+1$, unde m este număr real nenul.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

5p **b)** Determinați numărul real nenul m pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X+2$ este egal cu 11.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=1$, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

101. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+aX+8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=8$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 2.

102. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{2}{3}(x-3)(y-3)+3.$

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*\frac{3x}{2}=5x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*m*n=-1$.